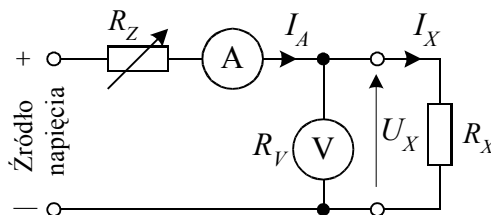


Ćwiczenie nr 3. Elementy liniowe i nieliniowe obwodów elektrycznych, pomiar charakterystyk stałoprądowych.

Cel ćwiczenia: Zapoznanie się ze sposobem opracowania wyników pomiarowych, obliczeniem niepewności wyniku pomiaru pośredniego. Zwrócenie uwagi na fakt, że niepewność pomiaru pośredniego zależy od niepewności pomiarów bezpośrednich i od mierzonej wielkości. Zapoznanie się z elementami liniowymi i nieliniowymi oraz wybranymi układami do pomiaru rezystancji.

1. Program ćwiczenia

- 1.1. W układzie jak na rys.1 wykonać pomiary charakterystyk napięciowo - prądowych $U = f(I)$ następujących elementów: rezystor, żarówka, dioda półprzewodnikowa spolaryzowana w kierunku przewodzenia.
- 1.2. W celu porównania, zmierzyć rezystancję ww. elementów bezpośrednio omomierzem cyfrowym.
- 1.3. Wykreślić charakterystyki napięciowo-prądowe badanych elementów.
- 1.4. Obliczyć rezystancje statyczne R_S mierzonych elementów i sporządzić ich wykresy $R_S = f(I)$, obliczyć niepewności pomiarów rezystancji statycznych: $\delta R_S, \Delta R_S$.
- 1.5. Obliczyć rezystancję przyrostową R_P mierzonych elementów i wykonać ich wykresy $R_P = f(I)$, obliczyć niepewności wyznaczenia rezystancji przyrostowych: $\delta R_P, \Delta R_P$.
- 1.6. Umieścić w sprawozdaniu wnioski na podstawie analizy otrzymanych wykresów, obliczonych wartości rezystancji (R_S, R_P) i ich niepewności $\delta R_S, \delta R_P$.



Rys.1. Schemat połączeń do pomiaru rezystancji statycznej i przyrostowej.

Rezystor R_Z zastosowano w celu zabezpieczenia badanych elementów przed uszkodzeniem.

Uwaga! Wstępnie nastawić R_Z na maksymalną wartość.

- 1.7. Przykłady tabel zawierających wyniki pomiarów i obliczeń.

Tab.1. Wyniki pomiarów bezpośrednich i ich niepewności

Lp.	I_A [mA]	ΔI_A [mA]	δI_A [%]	$(I_A \pm \Delta I_A)$ [mA]	U_V [V]	ΔU_V [V]	δU_V [%]	$U_V [V] \pm \Delta U_V [V]$
1								
⋮								

Tab.2. Wyniki pomiarów rezystancji statycznych.

I_A [mA]	$(R_S \pm \Delta R_S)$ [Ω]	δR_S [%]
1		
⋮		

Tab.3. Wyniki pomiarów rezystancji przyrostowych

I_P [mA]	$(R_P \pm \Delta R_P)$ [Ω]	δR_P [%]
1		
⋮		

Uwagi do wykonania pomiarów i ich opracowania:

- Jako zmienną niezależną przyjąć natężenie prądu I_A . Liczba punktów pomiarowych ≥ 10 , a ich rozmieszczenie na osi natężenia prądu w przybliżeniu równomierne.
- Wartości prądów i napięć odczytywać i zapisywać z pełną dokładnością.
- Obliczyć wartości rezystancji przyrostowych R_P (tab. 3) na podstawie dwóch sąsiednich punktów pomiarowych j, k (w sensie wartości prądu I_A), biorąc punkty o numerach (1, 2), (2, 3), (3, 4), itd. Wartości natężenia prądu I_P obliczać jako średnią z wybranych punktów: $I_P = \frac{1}{2} (I_{Aj} + I_{Ak})$.
- Zaleca się powtórzyć obliczenia wartości rezystancji przyrostowych R_P (tab. 3) z dwóch, nie sąsiednich punktów pomiarowych (w sensie wartości prądu I_A) lecz bliskich: (1, 3), (2, 4), (3, 5), itd.
- Charakterystyki napięciowo - prądowe badanych elementów zaleca się umieścić na wspólnym wykresie $U = f(I)$. Podobnie postąpić przy realizacji wykresów w punktach 1.4 i 1.5.

Ćwiczenie nr 3. Elementy liniowe i nieliniowe obwodów elektrycznych, pomiar charakterystyk stałoprądowych.

2. Wprowadzenie

Pomiar pośredni występuje wtedy, gdy wynik pomiaru nie jest bezpośrednio wskazany przez przyrząd pomiarowy, najczęściej jest on funkcją wyników kilku pomiarów bezpośrednich. Zagadnienia występujące w pomiarach pośrednich zostaną przedstawione na przykładzie pomiaru rezystancji w obwodach prądu stałego. Rezystancja określa właściwości dwójnika w obwodach prądu stałego lub składowej czynnej impedancji w obwodach prądu zmiennego. Wyróżnia się elementy liniowe i nieliniowe, zależnie od kształtu ich charakterystyki napięciowo-prądowej.

Rezystory *liniowe* mają stałą wartość rezystancji, niezależną od wartości prądu płynącego przez ten rezystor. Do opisu rezystorów *nieliniowych* wprowadza się trzy typy rezystancji: *statyczną*, *przyrostową* i *dynamiczną*.

Rezystancje statyczną i przyrostową definiuje się dla prądu stałego, w warunkach ustalonych termicznie, w następujący sposób:

- statyczna R_S – stosunek spadku napięcia U na rezystorze do prądu I płynącego przez rezystor:

$$R_S = \frac{U}{I}$$

- przyrostowa R_P – stosunek przyrostu spadku napięcia ΔU_P na rezystorze do przyrostu prądu ΔI_P wywołującego ten spadek:

$$R_P = \frac{\Delta U_P}{\Delta I_P}$$

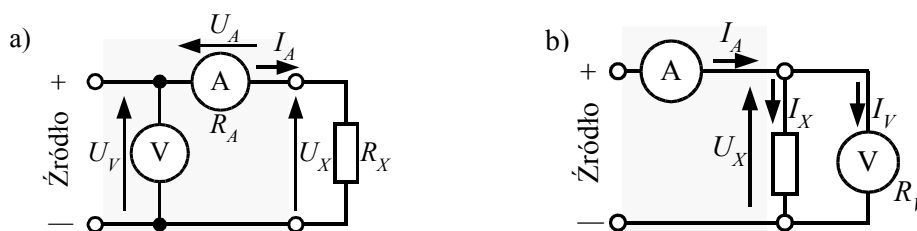
Rezystancja dynamiczna – jest definiowana przy prądzie zmiennym występującym razem z prądem stałym, amplituda prądu zmiennego powinna być znacznie mniejsza od prądu stałego.

Rezystancje: statyczna, przyrostowa, dynamiczna mogą mieć wartości zbliżone lub mogą się znacznie różnić między sobą w zależności od typu rezystora.

W rezystorze liniowym rezystancje: statyczna, przyrostowa i dynamiczna są sobie równe.

Rezystancję można mierzyć bezpośrednio za pomocą omomierza (analogowy, cyfrowy), mostka czteroramiennego Wheatstone'a, mostka sześcioramiennego Thomsona (jeśli mała wartość R) oraz pośrednio przy zastosowaniu metod: technicznej lub porównawczej.

Pomiar rezystancji metodą techniczną polega na pomiarze: prądu I_X płynącego przez rezystor i spadku napięcia U_X wywołanego tym prądem. Wartość rezystancji oblicza się z prawa Ohma. Stosuje się dwa układy pomiarowe: układ z poprawnym pomiarem prądu (*PPP*) i układ z poprawnym pomiarem napięcia (*PPN*) dlatego, że nie można jednocześnie zmierzyć poprawnie prądu płynącego przez rezystor i spadku napięcia na rezystorze (rys.2). Ten fakt jest źródłem błędów systematycznych nazywanego błędem metody¹.



Rys.2. Metoda techniczna pomiaru rezystancji.

- układ pomiarowy z poprawnym pomiarem prądu (*PPP*) płynącego przez rezystor - napięcie wskazane przez woltmierz jest powiększone o spadek napięcia na amperomierzu: $U_V = U_X + U_A$,
- układ pomiarowy z poprawnym pomiarem napięcia (*PPN*) na rezystorze – prąd wskazany przez amperomierz jest powiększony o prąd pobierany przez woltmierz: $I_A = I_X + I_V$

Układ *PPN* jest stosowany do pomiaru małych wartości rezystancji mierzonej (w stosunku do rezystancji woltmierzem), zaś w układzie *PPP* błąd metody maleje wraz ze wzrostem wartości rezystancji

¹ Przy znajomości rezystancji wewnętrznej przyrządu pomiarowego (amperomierza w układzie *PPP* lub woltmierzem w układzie *PPN*), wartość tego błędów można obliczyć i uwzględnić w wyniku w formie poprawki, uzyskując w ten sposób poprawną wartość wielkości mierzonej, tzn. nieobciążoną błędem metody. Wartość poprawna rezystancji jest wyznaczona z niepewnością wynikającą z dokładności użytych przyrządów.

Ćwiczenie nr 3. Elementy liniowe i nieliniowe obwodów elektrycznych, pomiar charakterystyk stałoprądowych.

mierzony (w stosunku do rezystancji amperomierza). W przypadku, kiedy błąd metody jest pomijalnie mały w stosunku do niepewności pomiaru rezystancji, można stosować wzór uproszczony:

$$R_x = \frac{U_x}{I_x} \cong \frac{U_V}{I_A} \quad \text{gdzie: } U_V, I_A - \text{odpowiednio wskazania woltomierza i amperomierza}$$

Niepewność wyniku pomiaru rezystancji statycznej, wyznaczono metodą różniczki zupełnej:

$$\delta R_x = (\delta U_x + \delta I_x)$$

Jest ona sumą niepewności względnych pomiaru: napięcia δU_x i prądu δI_x .

Rezystancję przyrostową R_p , która występuje przy prądzie I_p , wyznacza się na podstawie dwóch punktów pomiarowych j, k o współrzędnych: (I_j, U_j) i (I_k, U_k) według wzoru:

$$R_p = \frac{U_k - U_j}{I_k - I_j}$$

Jest to uśredniona wartość rezystancji z przedziału zawartego pomiędzy tymi punktami. Jest ona przypisana do prądu I_p , który jest średnią z tego przedziału: $I_p = \frac{1}{2}(I_j + I_k)$.

Niepewność pomiaru rezystancji przyrostowej również δR_p wyznaczono metodą różniczki zupełnej:

$$\delta R_p = \left| \frac{\Delta U_k + \Delta U_j}{U_k - U_j} \right| + \left| \frac{\Delta I_k + \Delta I_j}{I_k - I_j} \right|,$$

gdzie: $\Delta U_j, \Delta U_k, \Delta I_j, \Delta I_k$ - niepewności pomiarów, odpowiednio: napięć i prądów.

Niepewność wyznaczenia rezystancji przyrostowej zależy od niepewności wyznaczenia przyrostów napięcia i prądu oraz od odległości pomiędzy tymi punktami.

3. Obliczanie niepewności w pomiarach pośrednich

Do obliczania niepewności pomiaru pośredniego zalecane jest stosowanie *metody różniczki zupełnej*². Zostanie to wyjaśnione na przykładzie funkcji trzech zmiennych:

$$w = f(x, y, t).$$

Wartości zmiennych x, y, t , reprezentują wyniki pomiarów bezpośrednich. Jeśli są znane niepewności pomiarów bezpośrednich, to niepewność pomiaru pośredniego Δw_R oblicza się z następującej zależności:

$$\Delta w_R = \frac{\partial w}{\partial x} \Delta x_R + \frac{\partial w}{\partial y} \Delta y_R + \frac{\partial w}{\partial t} \Delta t_R \quad (1)$$

gdzie: $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial t}$ - pochodne cząstkowe³ funkcji $w(x, y, t)$ odpowiednio dla zmiennych x, y, t ,

$\Delta x_R, \Delta y_R, \Delta t_R$ - niepewności pomiarów bezpośrednich.

Niepewność pomiaru pośredniego Δw wyznacza się jako przypadek najgorszy z możliwych. Oblicza się z następującej zależności:

$$\Delta w = \left| \frac{\partial w}{\partial x} \Delta x \right| + \left| \frac{\partial w}{\partial y} \Delta y \right| + \left| \frac{\partial w}{\partial t} \Delta t \right| \quad (2)$$

gdzie: $\Delta x, \Delta y, \Delta t$ - niepewności pomiarów bezpośrednich

$|\cdot|$ - moduł wartości (wartość bezwzględna), użycie tego operatora zapewnia maksymalną możliwą wartość błędu.

Uwaga!

W praktyce często spotykaną postacią funkcji jest iloczyn wielkości pośrednich, które mogą wystąpić w dowolnych potęgach np.:

$$w = A \cdot x^m \cdot y^n \cdot t^k \quad (3)$$

gdzie: x, y, t - zmienne reprezentujące wyniki pomiarów bezpośrednich,
 m, n, k - liczby rzeczywiste będące wykładnikami potęg, A - stała.

² Funkcja wyrażająca wartość wyniku pomiaru pośredniego musi być ciągła i różniczkowalna.

³ Pochodną cząstkową funkcji wielu zmiennych dla wybranej zmiennej oblicza się w ten sposób, że pozostałe zmienne traktuje się jako stałe.

Ćwiczenie nr 3. Elementy liniowe i nieliniowe obwodów elektrycznych, pomiar charakterystyk stałoprądowych.

W tym szczególnym przypadku, do obliczania niepewności jest znacznie wygodniej skorzystać z metody różniczki logarytmicznej. W tej metodzie najpierw należy wykonać operację logarytmowania (otrzymuje się sumę logarytmów poszczególnych zmiennych), a następnie postąpić podobnie jak przy obliczaniu niepewności metodą różniczki zupełnej. Wynikiem tych operacji jest zależność:

$$\delta w = |m \cdot \delta x| + |n \cdot \delta y| + |k \cdot \delta t|, \quad (4)$$

$$\text{gdzie: } \delta w, \delta x, \delta y, \delta t - \text{niepewności względne: } \delta w = \frac{\Delta w}{w}, \delta x = \frac{\Delta x}{x}, \delta y = \frac{\Delta y}{y}, \delta t = \frac{\Delta t}{t}.$$

W tym przypadku, niepewność względna pomiaru pośredniego δw jest sumą niepewności względnych pomiarów bezpośrednich wziętych z wagą proporcjonalną do wykładnika potęgi, z jakim dany wynik pomiaru bezpośredniego występuje w wyrażeniu na wartość pomiaru pośredniego.

Przykład 1. Dane są wartości pomiarów bezpośrednich i ich niepewności: $x \pm \Delta x$, $y \pm \Delta y$. Wyznaczyć niepewność bezwzględną pomiaru Δw dla wyrażenia: $w(x, y) = A \cdot x - B \cdot y$; A i B – stałe.

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzoru (2) obliczono najpierw wartości pochodnych: $\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} = A$, $\frac{\partial w(x, y)}{\partial y} = -B$,

a następnie po podstawieniu do wzoru (2) otrzymano: $\Delta w = (|A \cdot \Delta x| + |-B \cdot \Delta y|)$

Ostatecznie po wykonaniu operacji $|\cdot|$ otrzymano wyrażenie na niepewność: $\Delta w = (A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y)$

Przykład 2. Zmierzona częstotliwość drgań obwodu rezonansowego złożonego z indukcyjności L i pojemności $C = 1000$ pF (niepewność wykonania $\pm 0,1$ %) wynosi $50,15$ kHz $\pm 0,05$ kHz. Obliczyć wartość indukcyjności L [mH] i bezwzględną niepewność jej wyznaczenia.

$$\text{Częstotliwość drgań obwodu rezonansowego wyraża się wzorem: } f = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}}.$$

Rozwiązanie: Dane: $f = 50,15$ kHz = $50,15 \cdot 10^3$ Hz, $C = 1000$ pF = $1 \cdot 10^{-9}$ F.

Po przekształceniu, poszukiwania wartość indukcyjności L wyraża się wzorem: $L = \frac{1}{(2\pi f)^2 C}$, zatem:

$$L = \frac{1}{(2\pi \cdot 50,15 \cdot 10^3 [\text{Hz}])^2 \cdot 1000 \cdot 10^{-12} [\text{F}]} = 0,010071598 [\text{H}] = 10,071598 [\text{mH}].$$

Jak można zauważyć, funkcja wyrażająca indukcyjność L ma postaci iloczynu zmiennych. Dla ułatwienia wzór na L zapisano w postaci: $L = \frac{1}{4} \pi^{-2} \cdot f^{-2} \cdot C^{-1}$.

W takim przypadku, wartość niepewności względnej δL , można obliczyć korzystając ze wzoru (4):

$$\delta L = |-2\delta\pi| + |-2\delta f| + |-\delta C|.$$

Po wyznaczeniu wartości bezwzględnych (operacja $|\cdot|$) ostatecznie otrzymano:

$$\delta L = 2\delta\pi + 2\delta f + \delta C, \quad \text{gdzie: } \delta L = \frac{\Delta L}{L}, \delta\pi = \frac{\Delta\pi}{\pi}, \delta f = \frac{\Delta f}{f}, \delta C = \frac{\Delta C}{C}$$

Przyjmując, że błąd przybliżenia⁴ liczby π jest pomijalnie mały, wyrażenie na δL się upraszcza i przyjmuje wartość:

$$\delta L[\%] = 2\delta f + \delta C = 2 \cdot \frac{0,05 [\text{kHz}]}{50,15 [\text{kHz}]} \cdot 100\% + 0,1\% \cong 0,3 \%,$$

$$\text{stąd: } \Delta L = \delta L \cdot L = 0,3\% \cdot L = 0,003 \cdot 10,071598 [\text{mH}] \cong 0,03 [\text{mH}].$$

Ostatecznie poszukiwana indukcyjność wraz z niepewnością przyjmuje wartość: $L = (10,07 \pm 0,03)$ mH.

⁴ Kalkulatory "inżynierskie" mają wartość π zapisaną w swojej pamięci z dokładnością przynajmniej do 8 cyfr znaczących, w takim przypadku błąd przybliżenia jest do pominięcia, natomiast przybliżenie π liczbą 3,14 jest obciążone ujemnym błędem o wartości $-0,05$ %.

Ćwiczenie nr 3. Elementy liniowe i nieliniowe obwodów elektrycznych, pomiar charakterystyk stałoprądowych.

4. Zadania i pytania kontrolne

- Zastosować metodę różniczki zupełnej do obliczenia niepewności wyznaczenia w dla następujących wyrażen: $W = 2y^2 - 4xy$, $Z = 5x^3/y^2$. Wartości niepewności Δx i Δy są znane.
Uwaga. Zastosowanie metody różniczki logarytmicznej do wyrażenia Z pozwala na uproszczenie obliczeń.

- Zastosować metodę różniczki zupełnej do obliczenia niepewności bezwzględnej dla

$$\text{następujących wyrażen: } W_1 = \sqrt{x^2 + y^2}, W_2 = \sqrt{x^2 - y^2}, W_3 = \arcsin\left(\frac{x}{y}\right), W_4 = \arccos\left(\frac{x}{y}\right).$$

Wartości niepewności bezwzględnych Δx i Δy są znane.

Uwaga. W obliczeniach należy uwzględnić pochodną wewnętrzną.

- Czy wyniki pomiaru rezystancji omomierzem cyfrowym na jego różnych zakresach pomiarowych będą zgodne ze sobą z dokładnością do niepewności pomiaru w przypadku:

a) rezystora liniowego? **b)** diody półprzewodnikowej w kierunku przewodzenia?

Uwagi: 1) Zgodność wyników oznacza wspólny przedział wartości. 2) Omomierz wymusza prąd, który płynie przez mierzony element. Zmiana zakresu powoduje zmianę wartości tego prądu.

- Wyznaczyć częstotliwość sygnału i jej niepewność, jeśli zmierzony okres drgań ma wartość $T = 82 \text{ ms} \pm 2 \text{ ms}$. Zapisać poprawnie wynik $f \pm \Delta f_x$.
- Woltomierzem analogowym klasy 0,5 na zakresie 7,5 V zmierzono napięcia dwóch źródeł otrzymując następujące wyniki: $U_1 = 7,35 \text{ V}$, $U_2 = 6,00 \text{ V}$. Obliczyć sumę ($U_S = U_1 + U_2$) i różnicę ($U_R = U_1 - U_2$) tych napięć oraz niepewność względną i bezwzględną ich określenia.
- Wyniki pomiaru spadków napięcia na pewnej rezystancji przy dwóch różnych prądach są następujące: $I_1 = 10,8 \text{ mA} \pm 0,1 \text{ mA}$, $U_1 = 3,24 \text{ V} \pm 0,02 \text{ V}$; $I_2 = 12,2 \text{ mA} \pm 0,1 \text{ mA}$, $U_2 = 4,05 \text{ V} \pm 0,02 \text{ V}$. Czy badany element jest elementem liniowym?
Uwaga. Obliczyć wartości rezystancji oraz określić ich niepewności.
- Oszacować minimalną wartość niepewności względnej δR pomiaru rezystancji metodą techniczną, jeśli wiadomo, że do pomiaru prądu zastosowano amperomierz analogowy o wskaźniku klasy 0,5, a do pomiaru spadku napięcia woltomierz analogowy kl. 0,2.
- Określić jak zmieni się niepewność określenia rezystancji przyrostowej R_p , jeśli odległość pomiędzy punktami pomiarowymi wybranymi do określenia tej rezystancji zostanie zmniejszona dwukrotnie? *Uwaga. Przyjąć, że bezwzględne niepewności pomiaru prądów i napięć nie ulegną zmianie.*
- Podać, jakiej relacji należy oczekiwać w układzie PPN pomiędzy rezystancją obliczoną ($R_{obl} = U_V/I_A$) jako iloraz napięcia U_V wskazanego przez woltomierz o rezystancji R_V i prądu I_A wskazanego przez amperomierz, a rezystancją mierzonego rezystora R_X :
a) $R_{obl} < R_X$, b) $R_{obl} = R_X$, c) $R_{obl} > R_X$.

Odpowiedzi:

$$1. \Delta W = 4|y - x| \cdot \Delta y + 4|y| \Delta x, \quad \delta Z = 3|\delta x| + 2|\delta y|$$

$$2. \Delta W_1 = \frac{|x \cdot \Delta x| + |y \cdot \Delta y|}{W_1}, \quad \Delta W_2 = \frac{|x \cdot \Delta x| + |y \cdot \Delta y|}{W_2}$$

$$\Delta W_3 = \Delta W_4 = \frac{|x|}{\sqrt{y^2 - x^2}} \left(\frac{\Delta x}{|x|} + \frac{\Delta y}{|y|} \right) [\text{rad}]$$

- a) tak, element liniowy, b) nie, bo ze zmianą prądu zmieni się rezystancja statyczna diody – element nieliniowy.

$$4. f = 12,2 \text{ Hz} \pm 0,3 \text{ Hz}$$

$$5. U_S = 13,35 \text{ V} \pm 0,08 \text{ V}, \quad \delta U_S = 0,6 \%$$

$$U_R = 1,35 \text{ V} \pm 0,08 \text{ V}, \quad \delta U_R = 5,6 \%$$

- Nie jest, ponieważ wartości rezystancji nie mają wspólnego przedziału niepewności.

- $\delta R_{min} = 0,7 \%$. Wystąpi to dla minimalnych niepewności pomiaru napięcia δU_{Rmin} i prądu δI_{Rmin} . Ten przypadek ma miejsce, gdy mierzona wartość jest bliska lub równa wartości zakresu przyrządu. Dla przyrządów analogowych $\delta X_{min}[\%] = kl$.

- wzrośnie od 2 do 4 razy – patrz str. 3.

- a) ponieważ R_{obl} to równoległe połączenie R_X i R_V .

5. Zestaw przyrządów (na jedno stanowisko):

makieta źródła napięcia (zielona), woltomierz cyfrowy, amperomierz cyfrowy, dekada oporowa, zestaw elementów (żarówka, rezystor, dioda świecąca)

Opracował: dr inż. Adam Krzywaźnia

Instytut Inżynierii Biomedycznej i Pomiarowej Wydziału PPT Politechniki Wrocławskiej