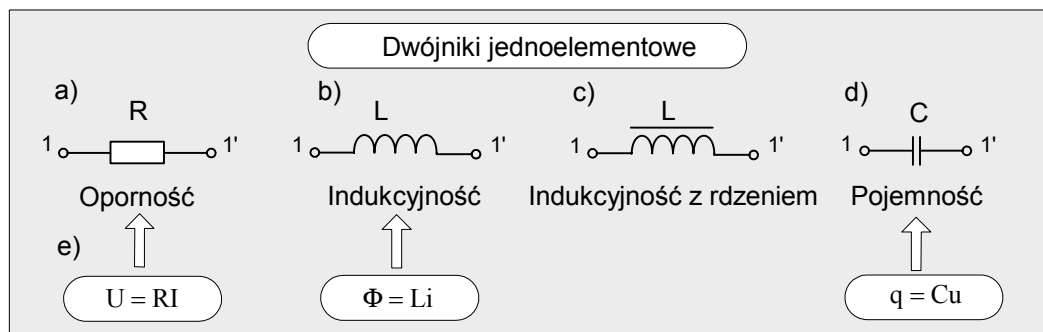


**Cel ćwiczenia:**

Podstawowym celem ćwiczenia jest zapoznanie studentów właściwościami elementów reaktancyjnych oraz ze zjawiskiem rezonansu elektrycznego. Zastosowanie przyrządów pomiarowych a zwłaszcza oscyloskopu umożliwia lepsze opanowanie zasad ich obsługi i realizowania pomiarów z ich udziałem.

**1. Wprowadzenie w tematykę ćwiczenia**

Trzy podstawowe elementy bierne obwodów elektrycznych to oporność, indukcyjność oraz pojemność elektryczna. Ich symbole stosowane przy rysowaniu schematów obwodów elektrycznych przedstawia rysunek 1. Każdy z tych elementów ma wyprowadzone na zewnątrz dwie końcówki (1 – 1'), dlatego często bywa nazywany *dwójnikiem*. Dwójnikiem jest również połączenie większej liczby elementów, jeżeli na zewnątrz te połączone elementy mają wyprowadzone tylko dwie końcówki. Mówimy wtedy o dwójnikach wieloelementowych (dwuelementowe, trójelementowe itd.).



Rys. 1. Symbole dwójników - jednoelementowych;  $U$  – napięcie na oporności,  $R$  – oporność,  $I$  – prąd stały płynący przez opornik,  $\Phi$  – strumień magnetyczny,  $L$  – indukcyjność,  $i$  – chwilowa wartość prądu płynącego przez indukcyjność,  $q$  – ładunek elektryczny zgromadzony w pojemności elektrycznej,  $C$  – pojemność elektryczna,  $u$  – wartość chwilowa napięcia występującego na pojemności elektrycznej

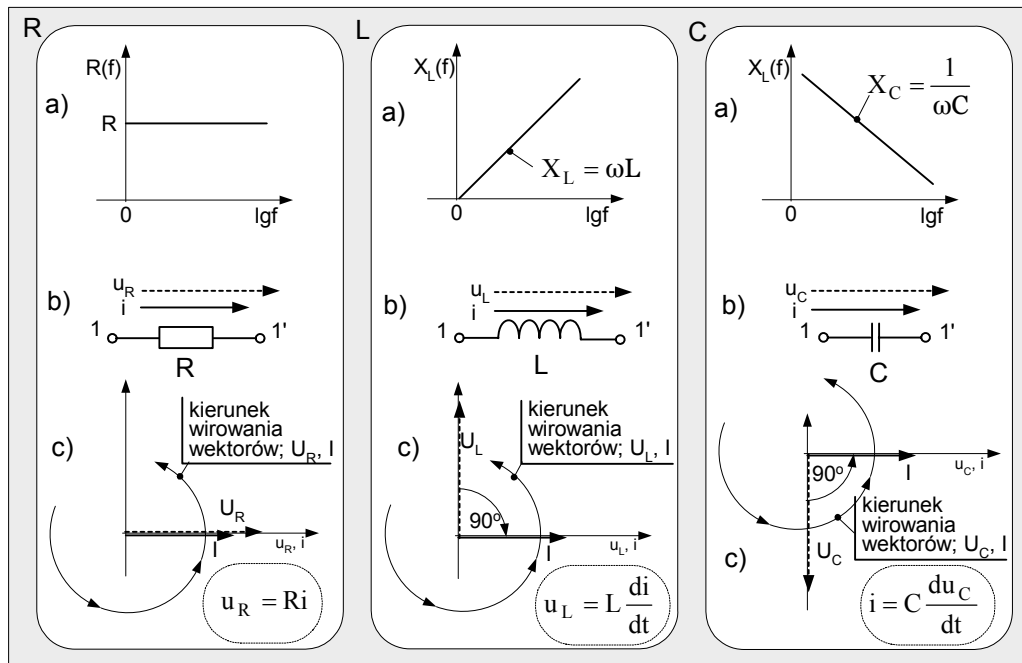
O dwójniku mówimy, że jest *liniowy* jeżeli dla elementów  $R$ ,  $L$ ,  $C$ , wchodzących w jego skład, zachodzą zależności podane na rysunku 1e. Jeżeli dwójnik nie posiada elementów przetwarzających energię elektryczną na ciepło (oporności  $R$ ) to taki dwójnik nazywa się *dwójnikiem reaktancyjnym*. Dwójniki zawierające element  $R$  nazywają się *dwójnikami ze stratami*. Dwójnik zawierający źródła wytwarzające czynną moc elektryczną (źródła napięć lub prądów stałych bądź zmiennych) nazywamy *dwójnikiem aktywnym*. Dwójniki bez takich źródeł mocy czynnej to *dwójniki pasywne*. W niniejszym ćwiczeniu i w dalszej części instrukcji omawiane są liniowe dwójniki pasywne, wieloelementowe.

Idealna oporność zachowuje stałą wartość nie zależnie od częstotliwości sygnału. Inaczej jest w przypadku indukcyjności i pojemności elektrycznej. Wartość oporu, jaki te elementy obwodu elektrycznego stawiają przy przepływie przez nie prądu zmiennego zależy od częstotliwości tego sygnału. W przypadku indukcyjności ich opór wrasta proporcjonalnie do wartości częstotliwości ( $X_L$ - reaktancja indukcyjna), natomiast w przypadku pojemności elektrycznej ( $X_C$ - reaktancja pojemnościowa) jej oporność maleje odwrotnie proporcjonalnie do częstotliwości (rysunek 2a). Ponadto (rysunek 2b):

- W przypadku oporności prąd zmienny płynący przez oporność i wywołany na tej oporności spadek napięcia są w fazie (kąt przesunięcia między wektorem prądu a wektorem napięcia jest równy zero).
- W przypadku indukcyjności najpierw na niej pojawia się spadek napięcia a dopiero później zaczyna przepływać przez indukcyjność prąd (wektor napięcia wyprzedza wektor prądu o kąt plus  $90^\circ$ ).
- W przypadku pojemności elektrycznej najpierw zaczyna przez nią przepływać prąd a dopiero

## Ćwiczenie nr 10. Dwójniki RLC, rezonans elektryczny

później pojawia się napięcie (wektor napięcia jest opóźniony w stosunku do wektora prądu o kąt minus  $90^\circ$ ).



Rys. 2. Podstawowe właściwości dwójników jednoelementowych R, L, C; (a) wartość oporności elementu w funkcji częstotliwości; (b) symbol elementu i chwilowe wartości prądu  $i$  oraz napięcia  $u_R$  lub  $u_L$  lub  $u_C$ ; (c) zależności kątowe między wektorem prądu  $I$  oraz wektorem napięcia  $U$ .

Powyżej podane relacje zachodzące między wartością chwilową prądu a wartością chwilową napięcia w odniesieniu do danego elementu (dwójnika jednoelementowego) wynikają z poniżej podanych zależności różniczkowych:

Jeżeli wartość chwilowa prądu jest równa

$$i = |I_m| \sin(\omega \cdot t) \quad (1)$$

to chwilowa wartość spadku napięcia na oporniku jest

$$u_R = Ri = R|I_m| \sin(\omega \cdot t) \quad (2)$$

natomiast chwilowa wartość napięcia na indukcyjności jest

$$u_L = L \frac{di}{dt} = \omega \cdot L |I_m| \sin(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}) \quad (3)$$

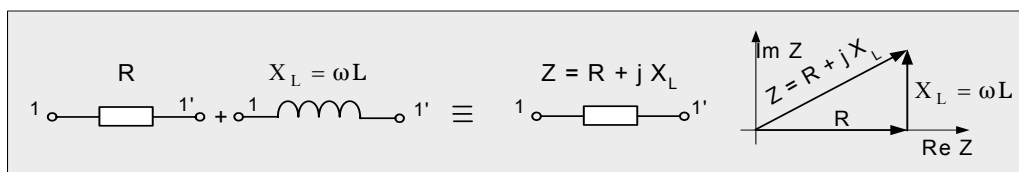
oraz chwilowa wartość napięcia na pojemności jest

$$u_C = \frac{1}{C} \int i dt = \frac{1}{\omega \cdot C} |I_m| \sin(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2}) \quad (4)$$

Stosując zapis symboliczny (liczby zespolone) powyższe zależności zapisane w postaci wektorowej są następujące; dla oporności  $U_R = RI$ , indukcyjności  $U_L = j\omega LI$  oraz pojemności  $U_C = -j[1/(\omega C)]I$ .

W ogólnym przypadku gałąź obwodu elektrycznego jest utworzona przez szeregowe połączenie dwójnika rezystancyjnego R oraz dwójników reaktancyjnych L i C. Charakteryzuje ją wielkość fizyczna jaką jest *impedancja*. Wielkość ta jest wielkością wektorową. Oznacza się ją symbolem Z.

*Szeregowe połączenie dwójników R i L.* Tworzy ono dwójnik stratny. Impedancja tego dwójnika ma postać:  $Z = R + j\omega L = R + jX_L = |Z|e^{j\phi}$ . Impedancja zespolona Z, rezystancja R oraz reaktancja indukcyjna  $X_L$  tworzą na płaszczyźnie trójkąt impedancji (rys. 3).



Rys. 3. Dwójnik RL, trójkąt impedancji

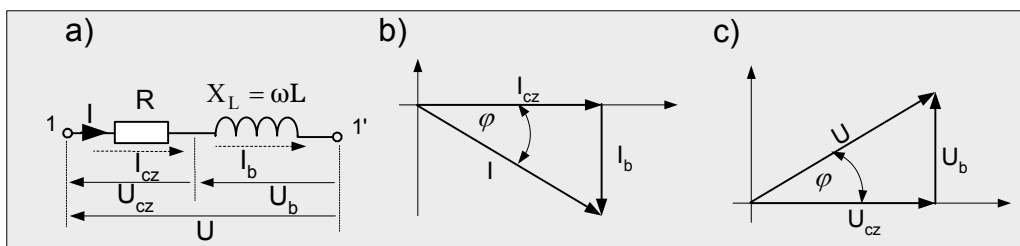
## Ćwiczenie nr 10. Dwójniki RLC, rezonans elektryczny

Podobnie jak w przypadku impedancji, można dla dwójnika jak na rysunku 3, zbudować; trójkąt prądu, trójkąt napięcia (rys. 4) oraz trójkąt mocy (rys. 5). Przy konstrukcji trójkąta prądu i napięcia przyjęto, że faza początkowa napięcia na zaciskach dwójnika RL jest równa zero. Zależności między prądami w elementach dwójnika i napięciami na elementach dwójnika mają postać:

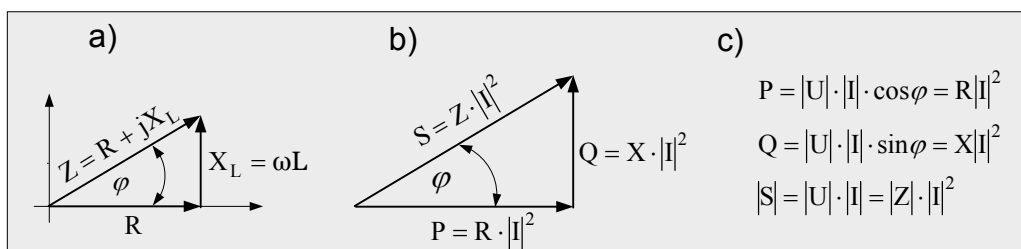
$$I = |I_{cz}| + j|I_b| = |I|(\cos\varphi - j\sin\varphi) \quad (5), \quad U = |U_{cz}| + j|U_b| = |U|(\cos\varphi + j\sin\varphi) \quad (6)$$

$$|I_{cz}| = \operatorname{Re}I = |I|\cos\varphi \quad (7), \quad |U_{cz}| = \operatorname{Re}U = |U|\cos\varphi \quad (8)$$

$$|I_b| = \operatorname{Im}I = -|I|\sin\varphi \quad (9), \quad |U_b| = \operatorname{Im}U = |U|\sin\varphi \quad (10)$$

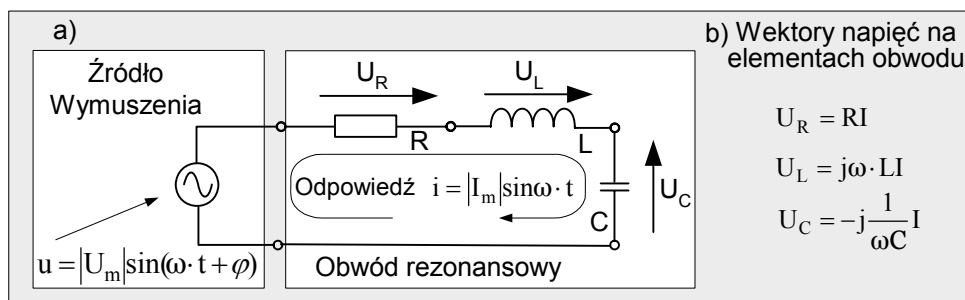


Rys. 4. Szeregowe połączenie oporności R oraz indukcyjności L; (a) elementy dwójnika oraz prądy płynące przez dwójnik i jego elementy oraz napięcie występujące na dwójniku i jego elementach; (b) trójkąt prądów dla dwójnika RL; (c) trójkąt napięć dla dwójnika RL;  $I_{cz}$ ,  $U_{cz}$ , - prąd czynny i napięcie czynne (związane z elementem R),  $I_b$ ,  $U_b$  – prąd bierny i napięcie biernie (związane z elementem L),  $I$ ,  $U$  – prąd dwójnika i napięcie na zaciskach dwójnika



Rys. 5. Trójkąt mocy w przypadku szeregowego dwójnika RL; (a) trójkąt impedancji; (b) trójkąt mocy; (c) zależności na moc czynną P, moc bierną Q, moc pozorną S

*Rezonans w obwodach prądu sinusoidalnego.* Zjawisko rezonansu w obwodzie elektrycznym może wystąpić, jeżeli w tym obwodzie są jednocześnie włączone; element reaktancyjny indukcyjny (cewka indukcyjna) oraz element reaktancyjny pojemnościowy (pojemność elektryczna – kondensator). Jest to możliwe zarówno przy szeregowym połączeniu elementów (*szeregowy obwód rezonansowy*) ja również przy równoległym połączeniu elementów (*równoległy obwód rezonansowy*). W szeregowym obwodzie rezonansowym występuje tak zwany *rezonans napięć*, natomiast w równoległym obwodzie rezonansowym *rezonans prądów*. W dalszej części instrukcji omawiany będzie szeregowy obwód rezonansowy (rys. 6).



Rys. 6. Szeregowy obwód rezonansowy; (a) obwód i źródło wymuszające przepływ prądu; (b) wektory napięć

## Ćwiczenie nr 10. Dwójniki RLC, rezonans elektryczny

Z trójkątów napięcia (rys. 4c) i prądu (rys. 4b) wynika, że na cewce idealnej napięcie wyprzedza prąd o kąt prosty ( $\pi/2$ ) a na idealnej pojemności napięcie opóźnia się w fazie względem prądu też o kąt prosty ( $\pi/2$ ). Napięcia na indukcyjności i pojemności mają charakter napięć biernych – tej energii nie można wykorzystać do wykonania pracy. Jedynie napięcie na idealnym oporniku jest napięciem czynnym – a więc związanym z energią, która może wykonać pracę.

Zjawisko rezonansu napięć w gałęzi szeregowej polega na tym, że przy pewnej, ściśle określonej częstotliwości nazywanej częstotliwością rezonansową obwodu napięcia na indukcyjności obwodu (napięcie  $U_L$ ) i pojemności obwodu (napięcie  $U_C$ ) są sobie równe co do wartości, przeciwnie skierowane i wielokrotnie większe od napięcia wymuszenia. Równość modułów tych napięć i przeciwny zwrot wektorów tych napięć powoduje, że napięcia te się kompensują przy częstotliwości rezonansowej. Warunek ten można zapisać jako:

$$U_L + U_C = 0 \quad (11)$$

lub inaczej 
$$\left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C}\right) \cdot I = 0 \quad (12)$$

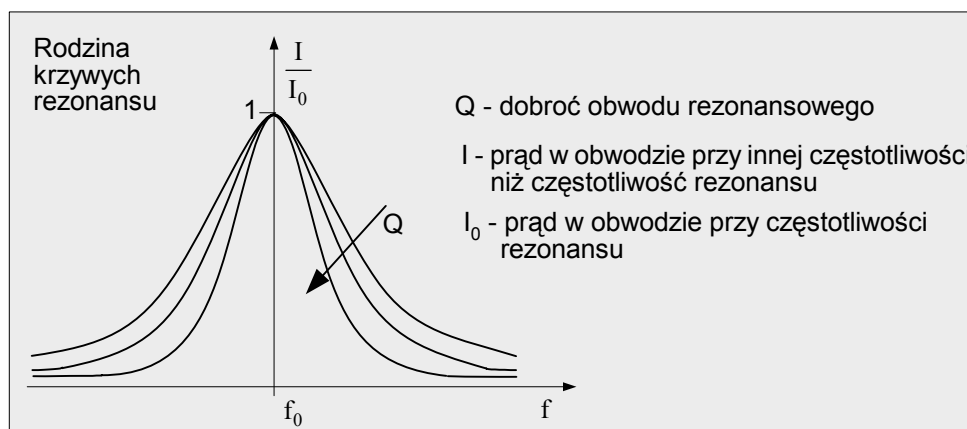
a to oznacza, że pulsacja 
$$\omega_0 = 2\pi \cdot f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (13)$$

i częstotliwość rezonansowa 
$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (14)$$

Z zależności (14) widać, że częstotliwość rezonansowa zależy tylko od wartości indukcyjności cewki i wartości pojemności kondensatora ( $f_0$  w Hercach, jeżeli  $L$  w Henrach a  $C$  Faradach). W czasie rezonansu obwodu szeregowego, reaktancja wypadkowa obwodu jest równa zero a wartość prądu płynącego w obwodzie jest maksymalna a ponadto prąd jest wtedy w fazie z napięciem. W czasie rezonansu wartość prądu płynącego w obwodzie jest określona równaniem:

$$I = \frac{U}{R + j\left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C}\right)} = \frac{U}{R} \quad (15)$$

Wartość prądu płynącego przy innej częstotliwości niż częstotliwość rezonansu określa również równanie (15) tylko z wstawioną aktualną wartością częstotliwości. Wykres wartości prądu płynącego w obwodzie w funkcji częstotliwości sygnału wymuszenia ma charakterystyczny kształt noszący nazwę krzywej rezonansowej (rys. 7). Podobny kształt ma krzywa reprezentująca zmianę wartości spadku napięcia na kondensatorze (lub cewce indukcyjnej) w funkcji częstotliwości sygnału wymuszenia.

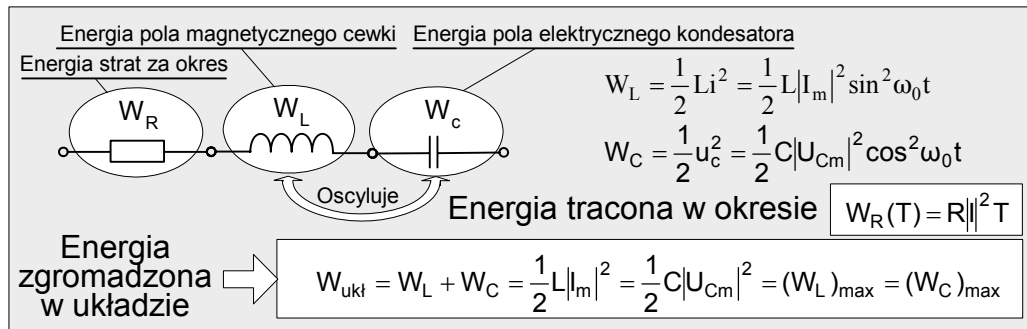


Rys. 7. Znormalizowane krzywe rezonansu dla szeregowego obwodu rezonansowego

*Impedancja charakterystyczna szeregowego obwodu rezonansowego, dobroć obwodu.* Z warunku rezonansu  $X_L = X_C$  można wyznaczyć, że  $\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}}$ . Wyznaczona wartość nosi nazwę

## Ćwiczenie nr 10. Dwójniki RLC, rezonans elektryczny

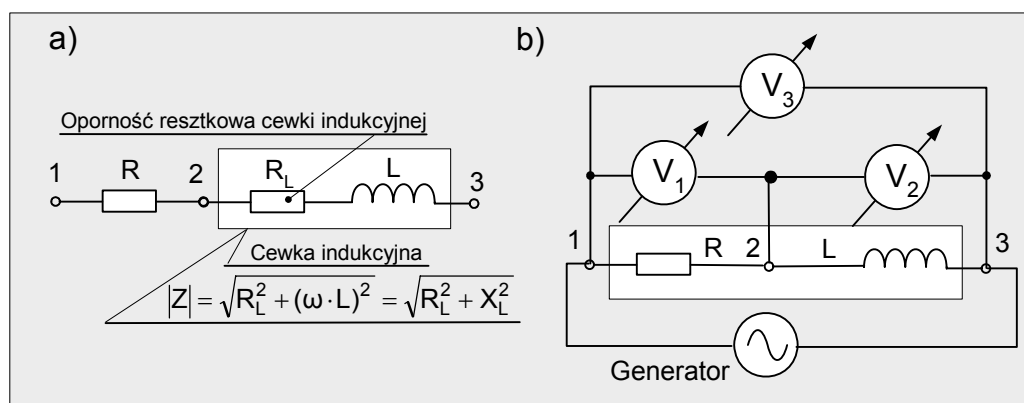
impedancji charakterystycznej obwodu rezonansowego. Dla obwodu rezonansowego jest zdefiniowana jeszcze jedna wielkość charakterystyczna – tak zwana dobroć obwodu rezonansowego. Dobroć obwodu rezonansowego jest określona stosunkiem energii zgromadzonej w czasie rezonansu w obwodzie rezonansowym do energii traconej w tym obwodzie w czasie jednego okresu. Pod pojęciem energii zgromadzonej w obwodzie rozumiana jest energia zgromadzona pod postacią pola magnetycznego w cewce oraz pola elektrycznego w kondensatorze. Pod pojęciem energii traconej rozumie się całkowitą energię rozpraszana w obwodzie (zamiana na ciepło, wypromieniowanie itp.). Podstawowe zależności energetyczne w szeregowym obwodzie rezonansowym podano na rysunku 8.



Rys. 8. Zależności energetyczne występujące w rezonansowym układzie R, L, C. Energie  $W_L$  i  $W_C$  oscylują przechodząc na przemian z energii pola magnetycznego cewki w energię pola elektrycznego kondensatora. Suma energii ( $W_L + W_C$ ) jest w każdej chwili w danym obwodzie wielkością stałą. W czasie jednego okresu oscylacji część energii ( $W_R(T)$ ) jest tracona.

## 2. Pomiary oporności i reaktancji dwójnika (metoda trzech woltomierzy)

W przypadku dwójników R, L jak i dwójników R, C możliwe jest określenie wartości oporności i reaktancji takiego prostego dwójnika (rys. 9a). Układ pomiarowy zawiera oprócz elementów mierzonych dwójnika trzy woltomierze (rys. 9b). Woltomierze te muszą pracować poprawnie w zakresie częstotliwości pomiarów. Zalecane jest, aby oporności wewnętrzne tych woltomierzy były znacznie większe od wartości oporności rezystancji R dwójnika oraz modułu impedancji Z.

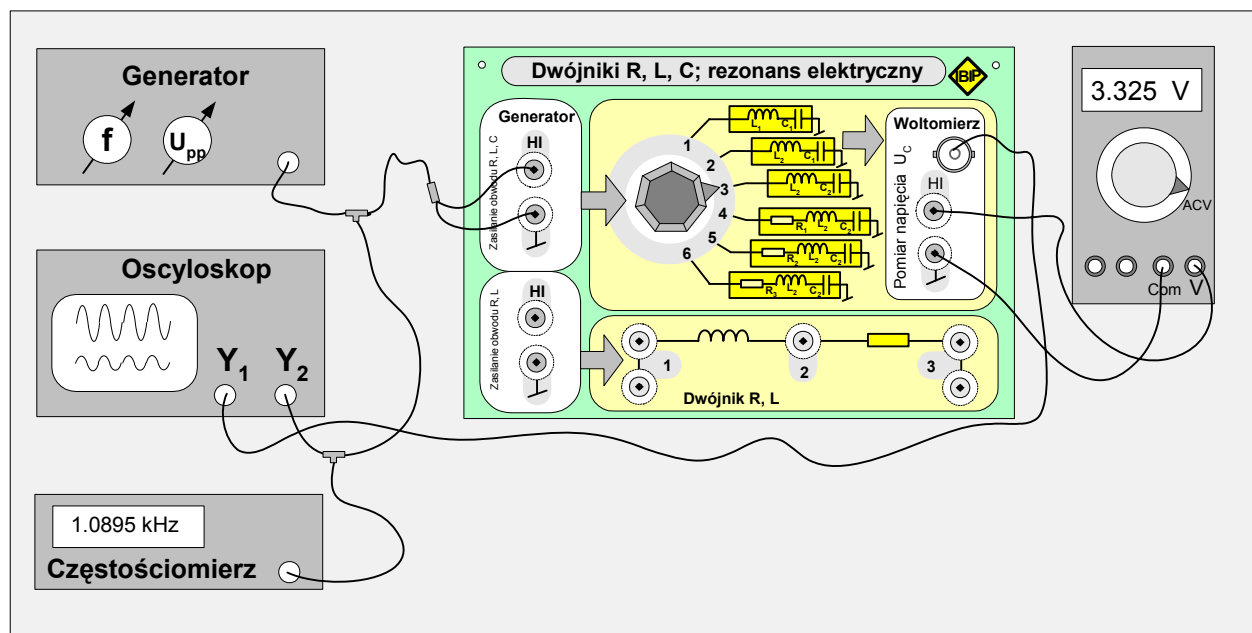


Rys. 9. Pomiar oporności czynnej i biernej trzema woltomierzami; (a) rzeczywista cewka indukcyjna zawierająca oprócz rezystancji indukcyjności L, oporność resztkowa  $R_L$  połączona w szereg z opornikiem R; (b) Sposób podłączenia woltomierzy do układu elementów dwójnika.

Pomiar wartości indukcyjności L i oporności resztkowej  $R_L$  wymaga określenia oporności opornika R. Można zastosować opornik wzorcowy lub zmierzyć wartości tego opornika w inny sposób na przykład przy prądzie stałym, jednak wartość jego oporności nie może zmienić się znacząco przy częstotliwości pomiaru wartości indukcyjności L. Wyjaśnienie zasady pomiaru trzema

woltomierzami należy szukać na rysunku 3 oraz rysunku 4.

### 3. Wykonanie ćwiczenia



Rys. 10. Ilustracja połączeń przyrządów na stanowisku pomiarowym

1. Na stanowisku laboratoryjnym złożyć układ pomiarowy jak na rysunku 10. Ustawić amplitudę sygnału sinusoidalnego z generatora na poziomie 1V. Zmieniając wartość częstotliwości generowanego sygnału określić właściwości różnych wariantów obwodu rezonansowego (częstotliwość rezonansu, krzywe rezonansu, dobroć obwodu, energię zgromadzoną w obwodzie).
2. Przełączyć generator z zasilania obwodu R, L, C na zasilanie Dwójnika R, L. Do zacisków 1, 2, 3 dwójnika R, L dołączyć trzy woltomierze realizując układ pomiarowy jak na rysunku 9b. Sygnał z generatora można obserwować na jednym z kanałów oscyloskopu. Częstotliwość sygnału ustawić posługując się odczytem z częstotlociornierza (zalecana częstotliwość  $f = 1$  kHz). Zmierzyć wartość opornika R. Wylńczyć wartość reaktancji cewki indukcyjnej oraz jej oporność resztkową  $R_L$ .
3. Wyniki opracować i zamieścić w sprawozdaniu.

### 4. Pytania kontrolne

1. Omów właściwości idealnych elementów R, L, C.
2. Omów właściwości dwójników R, L oraz R, C w połączeniu szeregowym i równoległym (wykresy wektorowe).
3. Elementy R, L, C w połączeniu szeregowym i równoległym. Zjawisko rezonansu elektrycznego. Wykres wektorów. Krzywa rezonansu, właściwości selektywne obwodu rezonansowego, zależności energetyczne, dobroć obwodu rezonansowego?
4. Pomiary właściwości dwójników R, L oraz R, C metodą techniczną (trzy woltomierze, trzy amperomierze). Zależności energetyczne, moc czynna, moc bierna.

### 5. Literatura

- [1] B. Konorski.: *Podstawy elektrotechniki*. PWN Warszawa 1967
- [2] T. Cholewicki.: *Elektrotechnika teoretyczna*. WNT Warszawa 1967
- [3] J. Rydzewski.: *Pomiary oscyloskopowe*. WNT, Warszawa 1994
- [4] A. Jelonek, Z. Karkowski.: *Miernictwo radiotechniczne*. WNT, Warszawa 1972, wydanie IV

Opracował: dr inż. Piotr Ruszel

Instytut Inżynierii Biomedycznej i Pomiarowej Wydziału PPT Politechniki Wrocławskiej