

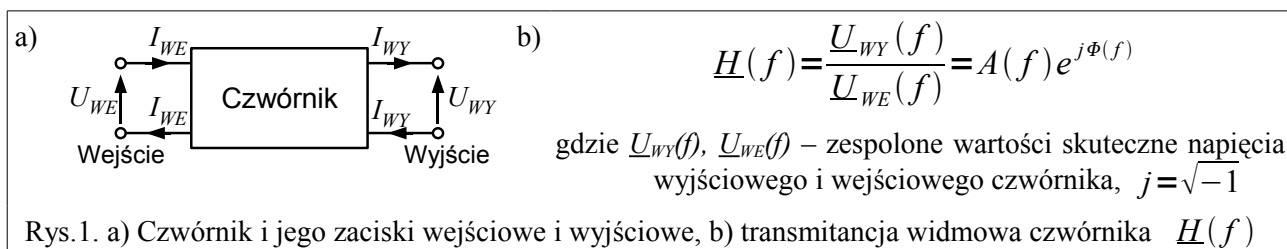
## Ćwiczenie nr 11. Czwórnik bierne - charakterystyki częstotliwościowe

## 1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie studentów z podstawowymi pojęciami dotyczącymi czwórników i pomiarem ich charakterystyk częstotliwościowych na przykładzie filtrów elektrycznych.

## 2. Wprowadzenie

Czwórnikiem elektrycznym nazywany jest obwód elektryczny, posiadający cztery wydzielone zaciski (jedną parę wejściowych i jedną parę wyjściowych), służące do połączenia z obwodem zewnętrznym. Prądy w parach są sobie równe i przeciwnie skierowane – rys.1a. Czwórnik opisuje się za pomocą **funkcji przenoszenia** w dziedzinie częstotliwości oraz **odpowiedzi impulsowej** w dziedzinie czasu (odpowiedź na deltę Diraca). **Funkcja przenoszenia  $\underline{H}(f)$** , nazywana również **transmitancją widmową czwórnika**, jest funkcją zespoloną, zdefiniowaną jako stosunek napięcia wyjściowego do wejściowego w postaci zespolonej (rys.1b):



Rys.1. a) Czwórnik i jego zaciski wejściowe i wyjściowe, b) transmitancja widmowa czwórnika  $\underline{H}(f)$

Pełny opis czwórnika wymaga zatem użycia dwóch rzeczywistych funkcji częstotliwości: modułu  $A(f)$  i kąta przesunięcia fazowego  $\Phi(f)$ , nazywanych odpowiednio **charakterystyką amplitudową** i **charakterystyką fazową** czwórnika. Obie charakterystyki można wyznaczyć doświadczalnie za pomocą **sinusoidalnego** sygnału pomiarowego, którego częstotliwość  $f$  jest zmieniana.

Charakterystykę  $A(f)$  można wyznaczyć mierząc stosunek wartości skutecznych napięcia wyjściowego czwórnika do jego napięcia wejściowego, np. za pomocą dwóch woltomierzy.

Charakterystykę fazową można wyznaczyć mierząc kąt przesunięcia fazowego pomiędzy sygnałami: wejściowym i wyjściowym za pomocą np. metody oscyloskopowej.

Przedmiotem ćwiczenia są czwórnik zawierające układy elektryczne cechujące się zdolnością różnicowania sygnałów elektrycznych pod względem ich właściwości częstotliwościowych. Są to filtry elektryczne.

Filtry znajdują zastosowania głównie w urządzeniach elektronicznych i elektrycznych. Stosuje się je tam, gdzie zachodzi potrzeba wyeliminowania z widma sygnałów, składowych o niepożądanych częstotliwościach, a przepuszczenia tylko pożądaných. Pasma częstotliwości, w którym widmo sygnału jest nietłumione lub mało tłumione nazywa się pasmem przepustowym, a pasmo w którym sygnały są silnie tłumione nazywa się pasmem tłumienia lub zaporowym. Częstotliwość, która rozdziela te pasma, nazywana jest częstotliwością graniczną  $f_g$ . Filtr może mieć więcej niż jedną częstotliwość graniczną.

Istnieje wiele kryteriów podziału filtrów. Według pasma częstotliwości filtry dzieli się na:

- dolnoprzepustowe (FDP) – pasmo przepustowe zawiera się od częstotliwości  $f=0$  Hz do częstotliwości granicznej  $f_g$ ; zakres  $f > f_g$  to pasmo zaporowe,
- górnoprzepustowe (FGP) – pasmo przepustowe zawiera się od częstotliwości granicznej  $f_g$  do  $\infty$ ,
- pasmowo-przepustowe (FSP) – pasmo przepustowe zawiera się od dolnej częstotliwości granicznej  $f_{g1}$  do górnej częstotliwości  $f_{g2}$  przy czym  $f_{g1} < f_{g2}$ ,
  - ◆ selektywne – pasmo przepustowe jest wąskie, tzn.  $(f_{g2} - f_{g1}) \ll f_{g1}$ , wtedy określa się dobroć filtru  $Q$
- pasmowo-zaporowe (FSZ) - pasmo przepustowe zawiera częstotliwości od  $f=0$  Hz do częstotliwości granicznej  $f_{g1}$  i od częstotliwości granicznej  $f_{g2}$  do nieskończoności.

Według techniki realizacji filtry dzieli się na:

- analogowe – z uwagi na rodzaj elementów zastosowanych do budowy filtrów wyróżnia się:
  - ◆ pasywne – zbudowane tylko z elementów RLC,
  - ◆ aktywne – do budowy są najczęściej wykorzystywane wzmacniacze operacyjne i elementy RC.
 W porównaniu do filtrów pasywnych, aktywne wykazują szereg zalet takich jak: stabilność pracy, łatwość przestrajania częstotliwości granicznych, brak tłumienia sygnału w paśmie przepustowym

## Ćwiczenie nr 11. Czwórniki bierne - charakterystyki częstotliwościowe

i możliwość wzmocnienia sygnału. Zaletą jest możliwość wyeliminowania elementów indukcyjnych – ma to szczególne znaczenie przy małych częstotliwościach. Filtry aktywne mogą pracować od tysięcznych części Hz do kilkunastu MHz. Górna częstotliwość graniczna filtrów aktywnych jest ograniczona pasmem przenoszenia zastosowanego wzmacniacza.

- cyfrowe – są realizowane w układach procesorowych w oparciu o odpowiednie algorytmy obliczeniowe. Operują one nie na rzeczywistym sygnale analogowym lecz na jego cyfrowej reprezentacji. Wynikiem filtracji jest również sygnał cyfrowy, który może być zamieniony na sygnał analogowy przy użyciu przetwornika cyfrowo - analogowego.

Podstawowe parametry charakteryzujące filtry to:

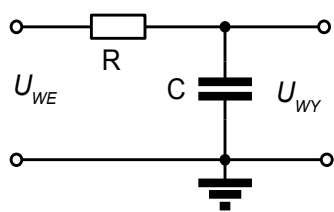
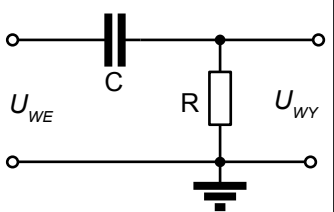
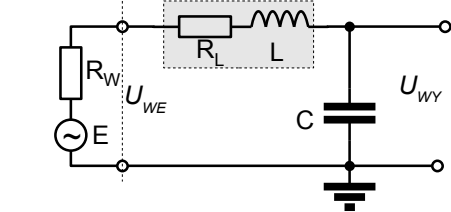
- typ charakterystyki filtru – dolnoprzepustowy, górnoprzepustowy, itp.,
- częstotliwości graniczne filtru – zwykle wyznaczane za pomocą kryterium 3 dB<sup>1</sup>,
- charakterystyka amplitudowa filtru – zmiana tłumienia w funkcji częstotliwości,
- charakterystyka fazowa<sup>2</sup> filtru – zmiana przesunięcia fazowego w funkcji częstotliwości,
- nachylenie zbocza charakterystyki<sup>3</sup> przy przejściu od pasma przenoszenia do pasma tłumienia, zazwyczaj wyrażane w dB/dekadę lub dB/oktawę<sup>4</sup>

Przyjęto, że na wykresach charakterystyki amplitudowe filtrów są przedstawiane w skali logarytmicznej, przy czym oś częstotliwości jest osią z podziałką logarytmiczną, a oś modułu wyraża się w decybelach. Dzięki takiemu założeniu uzyskuje się czytelne wykresy charakterystyk. Dalszym uproszczeniem są wykresy w postaci linii prostych – wykresy Bode'go. Przykłady filtrów RLC rozpatrywanych w ćwiczeniu to filtry I rzędu dolnoprzepustowy (FDP) i górnoprzepustowy (FGP) oraz filtr selektywny – tab.1.

Podstawowe liczbowe parametry badanych filtrów to:

- częstotliwości graniczne  $f_g$ , np. górna, dolna częstotliwość graniczna,
- szerokość pasma przenoszenia,
- częstotliwość środkowa  $f_s$  i dobroć  $Q$  dla filtrów selektywnych,
- nachylenie zbocza charakterystyki amplitudowej, zwykle w dB/oktawę lub dB/dekadę.

Tabela 1. Schematy badanych filtrów RLC

FDP I rzędu	FGP I rzędu	Selektywny
		
$f_g = \frac{1}{2\pi RC}$	$f_g = \frac{1}{2\pi RC}$	$f_s = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, \quad Q = \frac{2\pi f_s L}{R_W + R_L}$
$A(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_g)^2}}$	$A(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + (f_g/f)^2}}$	$A(f) = \frac{1}{\sqrt{[1 - (f/f_s)^2]^2 + [f/(f_s \cdot Q)]^2}}$
<p><b>Uwaga.</b> Częstotliwości graniczne badanych filtrów wynoszą: FDP około 400 Hz, FGP około 1200 Hz, selektywny około 1900 Hz. <math>R_L</math>, <math>L</math> – elementy modelu zastępczego rzeczywistej indukcyjności</p>		

1. Wzrost tłumienia o 3 dB oznacza, że wartość sygnału zmalała  $\sqrt{2}$  razy
2. Pomiar przesunięcia fazowego za pomocą oscyloskopu dwukanałowego polega na zmierzeniu opóźnienia sygnału wyjściowego względem wejściowego – różnica czasu  $t_R$  pomiędzy przejściem przez zero ww. sygnałów i obliczeniu przesunięcia fazowego według wzoru  $\Phi = \frac{t_R}{T} \cdot 2\pi$  [rad] lub w stopniach  $\Phi = \frac{t_R}{T} \cdot 360$ .
3. Liczba biegunów funkcji transmitancji  $H(f)$  określa rząd filtru. Nachylenie zbocza charakterystyki filtru w paśmie zaporowym może osiągnąć 20 dB/dekadę dla filtru I rzędu, 40 dB/dekadę dla filtru II rzędu itp.
4. Dekada oznacza tu dziesięciokrotny, a oktawa dwukrotny wzrost/spadek częstotliwości.

## Ćwiczenie nr 11. Czwórniki bierne - charakterystyki częstotliwościowe

## 3. Zadania pomiarowe

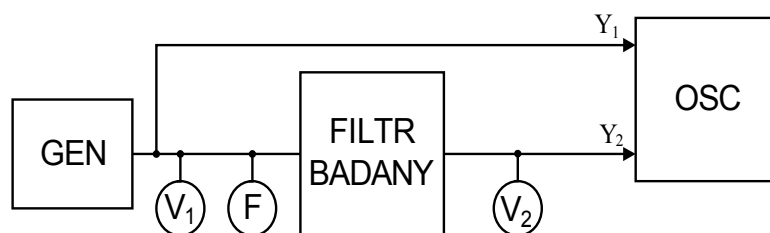
- A) Zmontować układ według schematu z rys. 2 (stosować przewody BNC).
- Zmierzyć charakterystyki amplitudowe trzech filtrów. Pomiary wykonać przy co najmniej 15 częstotliwościach. Częstotliwość pomiarową dobierać według podziałki:
    - logarytmicznej dla filtrów FDP i FGP,
    - liniowej dla filtru selektywnego wokół częstotliwości środkowej  $f_s$  w zakresie od około  $\frac{1}{2}f_s$  do około  $2f_s$ .
  - Wykreślić charakterystyki FDP i FGP we współrzędnych podwójnie logarytmicznych (oś  $y$  – tłumienie filtru w dB, oś  $x$  – częstotliwość w skali logarytmicznej – przykład na rys.3).
  - Charakterystyki układu selektywnego wykreślić następująco: tłumienie filtru (oś  $y$ ) w dB, częstotliwość - podziałka liniowa – oś  $x$ .
  - \*\* Porównać charakterystykę wyznaczoną doświadczalnie z charakterystyką wyznaczoną teoretycznie (wzór + wartości elementów na makiecie).
- B) Efekty działania filtru w dziedzinie czasu.
- Zaobserwować i zanotować istotne zmiany (lub ich brak) kształtu sygnału wyjściowego w odpowiedzi na sygnał wejściowy o częstotliwości  $f_G$  dla różnych jego kształtów
  - wyjaśnić przyczyny zaobserwowanych ww. zmian

Tabela 2. Przykład tabeli pomiarowej – do punktu 3.A

L.P.	$f$ [Hz]	$U_{WE}$ [V]	$\delta U_{WE}$ [%]	$U_{WY}$ [V]	$\delta U_{WY}$ [%]	$A(f)$ [V/V]	$\delta A(f)$ [%]	$A(f)$ [dB]	$\Delta A(f)$ [dB]
1									
⋮									

Tabela 3. Przykład tabeli – do punktu 3.B

	Filtr dolnoprzepustowy		Filtr górnoprzepustowy		Filtr selektywny	
		$U_{WE}$	$U_{WY}$		$U_{WE}$	$U_{WY}$
Pasma przepustowe	$f_G \approx 30$ Hz			$f_G \approx 2k$ Hz		
Pasma zaporowe	$f_G \approx 800$ Hz			$f_G \approx 70$ Hz		
				$f_G = f_s$		
				$f_G = \frac{f_s}{3}$		



Rys. 2. Schemat układu pomiarowego. GEN – przestrajany generator sygnału sinusoidalnego; OSC – oscyloskop dwukanałowy;  $V_1$ ,  $V_2$  – woltomierze TRMS napięcia zmiennego; F – miernik częstotliwości.

**Ćwiczenie nr 11. Czwórniki bierne - charakterystyki częstotliwościowe****4. Wskazówki do wykonania pomiarów, wzory, przykłady**

1. Sugerowane częstotliwości pomiarowe:

a) skala logarytmiczna – obwody FDP, FGP: 50, 70, 100, 150, 200, 300, 500, 700 1000, 1500, 2000, 3000, 5000, 7000, 10000, 15000, 20000 Hz ;

- skala liniowa – filtr selektywny. Najpierw określić częstotliwość środkową  $f_s$ , potem wykonać pomiary wokół tej częstotliwości w zakresie od około  $\frac{1}{2}f_s$  do około  $2f_s$ .
- Płynnie zmieniać częstotliwość w pobliżu oczekiwanej wartości  $f_s$  tak, aby uzyskać maksimum napięcia  $U_{WY}$  na wyjściu filtru – dla  $f=f_s$   $U_{WY} = U_{WYMAX}$ . Skorzystać z oscyloskopu, i/lub ze wskazań woltomierza.

b) **Uwaga.** Częstotliwość pomiarową ustawiać na generatorze w pobliżu żądanej wartości lecz zapisywać dokładną wartość odczytaną z częstotliciomierza.

2. Wzory do obliczeń

a) tłumienie:  $A \left[ \frac{V}{V} \right] = \frac{U_{WY}}{U_{WE}}$ ,  $A [dB] = 20 \cdot \lg \frac{U_{WY}}{U_{WE}}$

b) wartości niepewności maksymalnej wyznaczone metodą różniczki zupełnej:

c)  $\delta A = \delta U_{WE} + \delta U_{WY}$ ,  $\Delta A [dB] = \frac{20}{2,3} (\delta U_{WE} + \delta U_{WY})$ ,  $\delta U = \frac{\Delta U}{U}$

d) gdzie:  $\delta U_{WE}$ ,  $\delta U_{WY}$ , niepewność względna pomiaru napięcia

e) dobroci filtru selektywnego z charakterystyki amplitudowej:  $Q = \frac{f_s}{f_{g2} - f_{g1}}$ ,

gdzie:  $f_s, f_{g1}, f_{g2}$  – odpowiednio częstotliwości: środkowa, graniczne dolna i górna

3. Określenie częstotliwości granicznej  $f_g$  filtru z charakterystyki amplitudowej.

Wzrost tłumienia o 3 dB w stosunku do tłumienia w pasmie przepustowym określa częstotliwość graniczną  $f_g$  (rys.3, punkt G). Wartość częstotliwości  $f_g$  wyznaczona wprost z podziałki logarytmicznej jest obarczona dużą niepewnością z uwagi na jej nieliniowy charakter. Większą dokładność można uzyskać metodą pośrednią. Należy w tym celu wyznaczyć długości dwóch odcinków  $L_G$  i  $L_D$  od opisanej podziałki  $f_P$  na skali częstotliwości, a następnie obliczyć częstotliwości

z zależności:  $f_g = f_P \cdot 10^{\frac{L_G}{L_D}}$ .

Przykład obliczeniowy wg rys.3;

$$f_P = 100 \text{ Hz}, L_G = 17,5 \text{ mm}, L_D = 43,5 \text{ mm}$$

$$\text{stąd: } f_g = f_P \cdot 10^{L_G/L_D} = 100 \cdot 10^{17,5/43,5} \approx 253 \text{ Hz}$$

4. Wyznaczenie nachylenia zbocza charakterystyki w paśmie zaporowym z wykresu

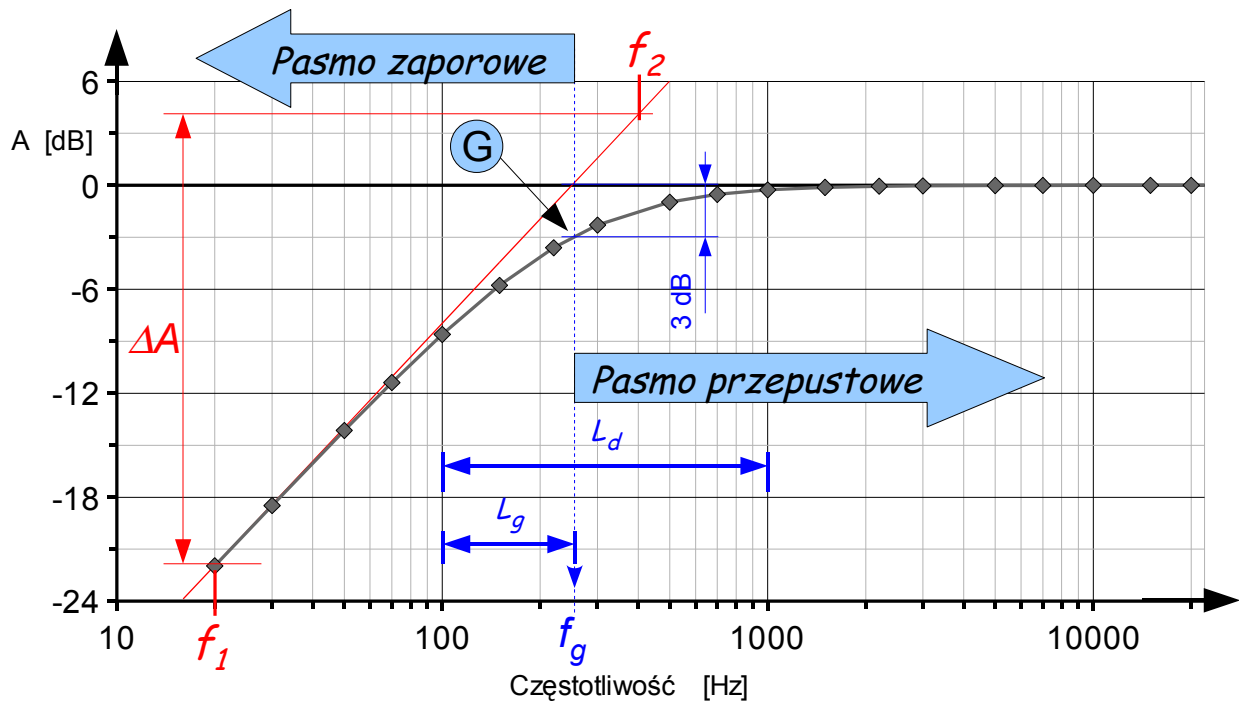
Narysować asymptotę do charakterystyki filtru w paśmie zaporowym. Wyznaczyć różnicę tłumienia  $\Delta A$  na tej prostej pomiędzy dwiema odległymi częstotliwościami:  $f_1, f_2$ . Nachylenie zbocza obliczyć według zależności.

$$\frac{\Delta A \cdot \lg 10}{\lg(f_2/f_1)} \text{ [dB/dekadę]} \quad \text{lub} \quad \frac{\Delta A \cdot \lg 2}{\lg(f_2/f_1)} \text{ [dB/oktawę]}.$$

Przykład obliczeniowy wg rys.3;

$$\Delta A = 26 \text{ dB}, f_1 = 10 \text{ Hz}, f_2 = 400 \text{ Hz};$$

$$\frac{\Delta A \cdot \lg 10}{\lg(f_2/f_1)} = \frac{26 \text{ dB}}{\lg(400/10)} = 19,98 \approx 20 \text{ dB/dekadę} \approx 6 \text{ dB/oktawę}.$$



Rys.3. Przykładowa charakterystyka filtra górnoprzepustowego I rzędu. Przykład wyznaczenia częstotliwości granicznej  $f_g$  wg kryterium 3 dB oraz nachylenia zbocza charakterystyki filtra w paśmie zaporowym.

## 5. Zadania i pytania kontrolne

- Wyrazić w dB wartości dziesiętne: 1; 0,7071; 2; 20; 0,05; 50.
- Podane są wartości w dB: 10; -6; 6; 26; -46 [dB]. Obliczyć odpowiednie wartości dziesiętne.
- Obliczyć częstotliwość graniczną  $f_g$  filtra dolnoprzepustowego I rzędu, jeśli  $R = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 1 \text{ nF}$ . Narysować charakterystykę amplitudową tego filtra (podać  $A(f)$  w dB).
- Obliczyć niepewność wyznaczenia częstotliwości granicznej  $\Delta f_g$  z zadania (3), jeżeli tolerancja elementów wynosi 5%.
- Wzmocnienie filtra aktywnego wynosi 20 V/V z błędem  $\pm 1\%$ . Przedstawić te dane w dB.
- Na podstawie danych przyrządów ( $V_1$ ,  $V_2$ ) obliczyć niepewność wyznaczenia  $A(f)$  w % i w dB.
- Obliczyć częstotliwość środkową filtra selektywnego i jej niepewność, jeżeli  $L = 33 \text{ mH}$ ,  $C = 220 \text{ nF}$ , a tolerancja wykonania tych elementów wynosi  $\delta = 5\%$ .
- Na czym polega zjawisko rezonansu w szeregowym obwodzie RLC? Objasnić analizując impedancję obwodu w funkcji częstotliwości.
- Narysować charakterystyki amplitudowe filtrów: FDP, FGP, FSP, FSZ. Zdefiniować parametry filtrów i zaznaczyć je na rysunkach.

## 5. Literatura

- P. Horowitz, W. Hill, *Sztuka elektroniki*. WKiŁ, Warszawa 2003, tom I.
- S. Bolkowski, W. Brociek, H. Rawa, *Teoria obwodów elektrycznych – zadania*, WNT, Warszawa, 2003, rozdz. 3.3.

## 6. Zestaw przyrządów pomiarowych

- |                                                                 |        |
|-----------------------------------------------------------------|--------|
| 1. Generator funkcyjny                                          | 1 szt. |
| 2. Oscyloskop dwukanałowy                                       | 1 szt. |
| 3. Woltomierz cyfrowy napięcia zmiennego - pasmo minimum 20 kHz | 2 szt. |
| 4. Cyfrowy miernik częstotliwości                               | 1 szt. |
| 5. Trójnik BNC                                                  | 1 szt. |
| 6. Makieta FILTRY                                               | 1 szt. |

Opracowali: dr inż. Adam Krzywaźnia, dr inż. Janusz Ociepka  
Instytut Inżynierii Biomedycznej i Pomiarowej Wydziału PPT Politechniki Wrocławskiej